Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

14.09.2021

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 7.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lambda - \frac{5}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \ \vee \ \lambda_2 = \frac{5}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Der komplexe Eigenwert λ_1 hat den Eigenraum

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\left(\frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\right) \\ \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die beiden folgenden Funktionen y_1 und y_2 bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}, \\ y_2(x) &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

welches die Lösung $(a, b) = (2, 0)$ besitzt. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 2:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - \mathrm{e}^y, (1+y^2)y + x^3 \right).$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass f auf $U_\delta((x,y))$ injektiv ist. Betrachten Sie weiter die Funktion in einer solchen Umgebung des Ursprungs und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $(-1,0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: Zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein $\delta > 0$, sodass f auf $U_\delta((x,y))$ injektiv ist. Weiter gilt $(f^{-1})'(-1,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Beweis: f ist nach der Produktregel differenzierbar und es gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x) & -\mathrm{e}^y \\ 3x^2 & 1+3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos^2(x) & -\mathrm{e}^y \\ 3x^2 & 1+3y^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $\det f'(x,y) = (1+\cos^2(x))(1+3y^2) + 3x^2\mathrm{e}^y \geq 1 > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}$. Nach dem Umkehrsatz existiert also ein $\delta > 0$, sodass f auf $U_\delta(x,y)$ injektiv ist. Des Weiteren gilt $f(0,0) = (-1,0)$ und somit existiert in einer solchen Umgebung des Ursprungs die Umkehrfunktion von f. Ebenso gilt nach dem Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(-1,0) = (f'(f^{-1}(-1,0)))^{-1} = (f'(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text “keine Beziehung” in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$ und $x_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

f hat in x_0 ein lokales Extremum.	k.B.[1)]	$\det H_f(x_0) < 0$.

Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}z}\right)^n$ konvergiert.	$\Leftrightarrow$[2)]	$\lvert z\rvert > 1$.

Es seien $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \lvert \lVert x \rVert - 2 \rvert < 1\}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

f ist konstant.	$\Leftrightarrow$[3)]	$\forall x \in D\colon f'(x) = 0$.

Es seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\alpha > 0$.

$\int_B \mathrm{e}^{-\lVert x \rVert}\, dx > \alpha$.	$\Rightarrow$[4)]	$\lvert B\rvert > \alpha$.

(ii) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(t) := t\mathrm{e}^{-t^2}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, ds$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) 1) Setze $D = \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) := x^3 - 12xy + 8y^3$. Nach Vorlesung gilt $\operatorname{grad} f(2,1) = (0,0)$ und f hat in $(2,1)$ ein lokales Minimum, aber $\det H_f(2,1) > 0$. Die Rückrichtung gilt nach Satz 18.10.

2) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}z}\right)^n \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\mathrm{i}z}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < |z|\,.$$

3) Es gilt $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < \|x\| - 2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < \|x\| < 3\}$, d.h. D ist ein offener Kreisring. Wenn f auf D konstant ist, gilt offensichtlich auch $f' \equiv 0$ auf D. Die Umkehrung folgt aus einem Satz aus der Vorlesung, da D ein Gebiet ist.

4) Wegen $\mathrm{e}^{-\|x\|} \leq 1$ $(x \in B)$ gilt

$$\alpha < \int_B \mathrm{e}^{-\|x\|}\, dx \leq \int_B 1\, dx = |B|\,.$$

Wegen $\mathrm{e}^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$ existiert ein $\beta > 0$, sodass $\mathrm{e}^{-t} \leq \frac{1}{2}$ für $t \geq \beta$. Wähle $\gamma > \beta$ so, dass für die Menge $B := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \beta \leq \|x\| \leq \gamma\}$ gilt: $|B| = 2\alpha$. Dann gilt:

$$\int_B \mathrm{e}^{-\|x\|}\, dx \leq \frac{1}{2} \int_B 1\, dx = \frac{1}{2}\, |B| = \alpha.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, ds = -2t(2t^2 - 3)\mathrm{e}^{-t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Beweis: f ist eine schnell fallende Funktion, somit gilt nach Satz 24.9 aus der Vorlesung für $s \in \mathbb{R}$: $s^2 \hat{f}(s) = -(\mathrm{i}s)^2 \hat{f}(s) = -\widehat{f''}(s)$. Mit der inversen Fouriertransformation aus demselben Satz erhält man schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, ds = -\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f''}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, dx = -f''(t) = -2t(2t^2 - 3)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

□

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Es sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| \leq z, |y-1| \leq \frac{3}{2}z + 3, z \in [1,2]\}$. Berechnen Sie das Volumen:

$$|B| = \boxed{32}.$$

(ii) Es sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) := \begin{cases} \pi, & t \in [6,8], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von g:

$$\hat{g}(s) = \boxed{\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}s} \begin{cases} 1, & s = 0, \\ \frac{\sin(s)}{s}, & s \neq 0. \end{cases}}.$$

(iii) Bestimmen Sie den Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} -x^2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \boxed{0}.$$

(iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^x$:

$$y(x) = \boxed{a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{2x} + cx\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a,b,c \in \mathbb{R})}.$$

(v) Es seien $a = (a_1, a_2)$ eine Richtung und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y - x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung a:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \boxed{a_1^2(a_2 - a_1)}.$$

(vi) Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0, y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M x^2y + y^3 \, d(x,y) = \boxed{\frac{2+\sqrt{2}}{10}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Für $z \in [1,2]$ setze

$$Q(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y,z) \in B\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \, |x| \leq z, |y-1| \leq 3 + \frac{3}{2}z\right\},$$

$Q(z)$ ist ein abgeschlossenes Rechteck mit den Seitenlängen $2z$ und $6 + 3z$ und somit gilt $|Q(z)| = 6z^2 + 12z$. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt schließlich

$$|B| = \int_1^2 |Q(z)| \, dz = \left[2z^3 + 6z^2\right]_1^2 = 16 + 24 - 2 - 6 = 32.$$

(ii) Definiere $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Damit gilt $f(t) = \pi g(t-7)$ $(t \in \mathbb{R})$. Für die Fouriertransformierte gilt:

$$\hat{f}(s) = \pi \mathrm{e}^{-7\mathrm{i}s}\hat{g}(s) = \mathrm{e}^{-7\mathrm{i}s} \begin{cases} 1, & s = 0, \\ \frac{\sin(s)}{s}, & s \neq 0. \end{cases}$$

(iii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$. Der Integrand ist somit ungerade und es gilt folglich für $\alpha > 0$: $\int_{-\alpha}^{\alpha} -x^2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \, dx = 0$. Somit existiert der Cauchysche Hauptwert und ist 0.

(iv) Das charakteristische Polynom zur homogenen Differentialgleichung lautet $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{2x} + cx\mathrm{e}^{2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$ mit $A \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $A = \frac{1}{2}$, und damit $y_p(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{2x} + cx\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(v) Es sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, d.h. $|a| = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{f((0,0) + t(a_1, a_2)) - f(0,0)}{t} &= \frac{f(ta_1, ta_2)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{a_1 a_2 t^3 - a_1^3 t^3}{(a_1^2 + a_2^2)t^2} \\ &= a_1^2(a_2 - a_1) \xrightarrow{t \to 0} a_1^2(a_2 - a_1).\end{aligned}$$

(vi) Es gilt

$$M = \left\{ (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \colon r \in [0,1], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \right\}.$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten und mithilfe des Satzes von Fubini erhält man

$$\begin{aligned}\int_M x^2 y + y^3 \, d(x,y) &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} r^4 \sin(\varphi) \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^4 \left[-\cos(\varphi)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \, dr \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) r^4 \, dr = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$